

استفاده از مثال‌های نقض

در آموزش ریاضی دوره متوسطه

چکیده

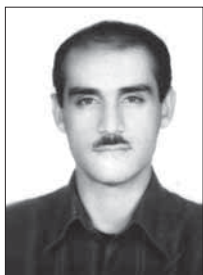
ممارست در ایجاد مثال‌ها و مثال‌های نقض می‌تواند خلاقیت و تفکر ریاضی دانش‌آموزان را افزایش دهد. مثال‌های نقض به عدم تأیید، توجیه، بحث، استدلال و تفکر منطقی می‌پردازند که برای پرورش مهارت‌های ریاضی ضروری هستند. با توجه به این مهم، در مقاله حاضر نمونه‌هایی از مثال‌های نقض پرکاربرد را که معمولاً در تدریس ریاضیات متوسطه و در موضوعاتی مانند حد، مشتق و انتگرال مفید واقع می‌شوند، ارائه می‌کنیم.

مقدمه

پولیا^۱ می‌گوید: یافتن یا برخاستن مثال‌های نقض نیازمند خلاقیت و نظم فکری است. اگر مثال بررسی شده یک قانون را اثبات کند، خواننده آن ممکن است حدس بزند که این قانون لزوماً وجود دارد و ایده‌ای درباره چگونگی اثبات آن به دست آورد؛ یا شاید بتواند در مورد اینکه چه مثالی باید برای رد کردن آن قانون مورد بررسی قرار گیرد، تصمیم بگیرد. **کلیمچاک**^۲ و **گروئن والد**^۳ نیز می‌گویند: یکی از چنین راهبردهایی می‌تواند به این صورت باشد: «دادن عبارت نادرست به دانش‌آموزان برای توجه بیشتر به مفاهیم، شرایط تئوری، خواص توابع، استدلال و توجیه.»

اهداف استفاده از مثال‌های نقض در ریاضی

۱. به منظور درک عمیق‌تر دانش ریاضی و به منظور از بین بردن تصورات غلط؛
۲. به منظور افزایش مهارت‌های تفکر در تجزیه و تحلیل، توجیه، مقایسه، بررسی و اثبات؛
۳. به منظور ایجاد بینش عمیق‌تر و مفهومی‌تر؛
۴. به منظور کاهش یا از بین بردن تصورات غلط؛
۵. برای پیشروی در تفکر منطقی ریاضی؛
۶. به منظور افزایش مهارت‌های «تفکر کلی» در ریاضیات.



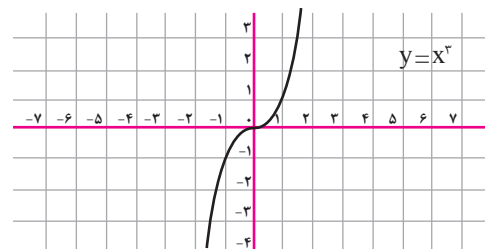
گردآوری:
هیثم دیناروند
کارشناس ارشد ریاضی
دبیر ریاضی
شهرستان
شوش دانیال (ع)

برای تعمیق بیشتر بحث گزاره‌هایی از مباحث مختلف ریاضی می‌آوریم که به ظاهر و در بسیاری موارد صحیح هستند، اما مثال‌های نقضی برای آن‌ها ارائه شده است.

نظریه توابع

۱. خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، خطی است که تنها در یک نقطه با منحنی مشترک است اما آن را قطع نمی‌کند.

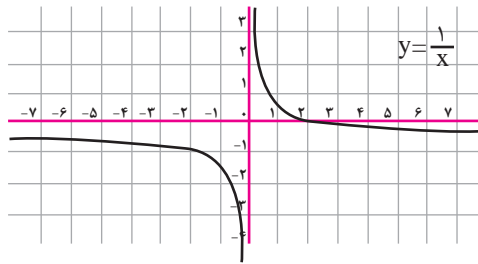
مثال نقض: محور X ها، خط مماس بر منحنی $y=x^3$ است، اما منحنی را در مبدأ قطع می‌کند.



۲. اگر تابع $y=f(x)$ به ازای تمامی X های مثبت پیوسته و نزولی باشد، در نتیجه این تابع دارای ریشه است.

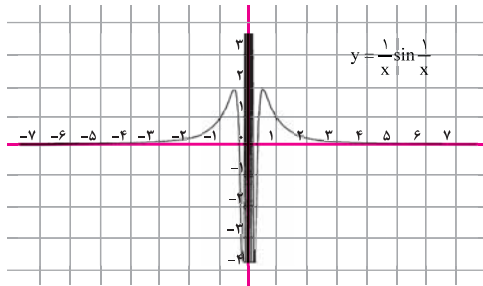
مثال نقض: تابع $y = \frac{1}{x}$ پیوسته است و به ازای X های مثبت، نزولی است، اما هیچ ریشه‌ای ندارد.

۵. خط راست $x=a$ مجانب قائم برای تابع $y=f(x)$ است، اگر چندین مقدار بی‌نهایت برای $f(x)$ در نزدیکی نقطه $x=a$ وجود داشته باشد.

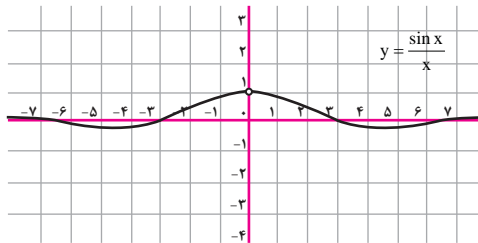


مثال نقض: چندین مقدار بی‌نهایت برای تابع $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ در نزدیکی نقطه $x=0$ وجود دارد، اما خط $x=0$ مجانب قائم این تابع نیست.

۳. اگر $g(a) = 0$ باشد، تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x=a$ مجانب قائم دارد.



مثال نقض: تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه $x=0$ مجانب قائم ندارد.



پیوستگی

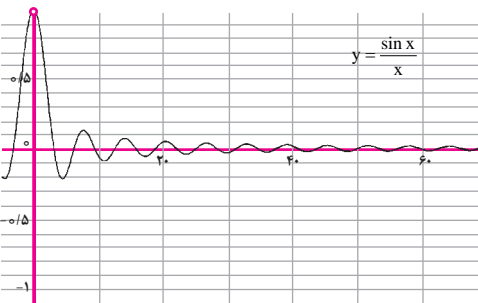
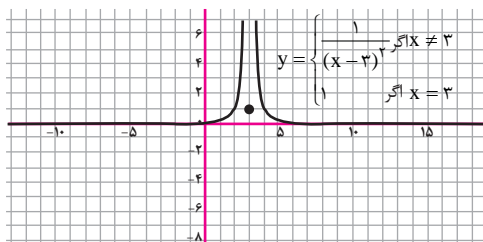
۶. اگر تابعی در همسایگی معینی از نقطه $x=a$ تعریف شود، به طوری که در سمت چپ نقطه $x=a$ صعودی و در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت، یک نقطه ماکزیمم موضعی در نقطه $x=a$ به وجود می‌آید.

مثال نقض: تابع $y = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2} & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$

۴. اگر یک خط راست برای یک منحنی مجانب افقی باشد، زمانی که x به بی‌نهایت گرایش دارد و منحنی به آن خط راست نزدیک‌تر می‌شود، آن را قطع نمی‌کند و بر آن مماس نیست.

برای تمامی x ها تعریف می‌شود و از چپ از نقطه $x=3$ صعود می‌کند و از راست از نقطه $x=3$ نزول می‌یابد، اما هیچ ماکزیمم موضعی در نقطه $x=3$ ندارد.

مثال نقض: زمانی که x به سمت بی‌نهایت گرایش دارد، تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ از بالا و پایین به محور x نزدیک‌تر می‌شود: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. محور x مجانب افقی تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ است، اما نمودار این تابع چندین بار محور x را قطع می‌کند.



مشتق

۷. اگر یک تابع غیرخطی، مشتق‌پذیر و در فاصله $(0, \infty)$ یکنوا باشد، مشتق آن نیز در $(0, \infty)$ یکنوا است.

مثال نقض: برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم:

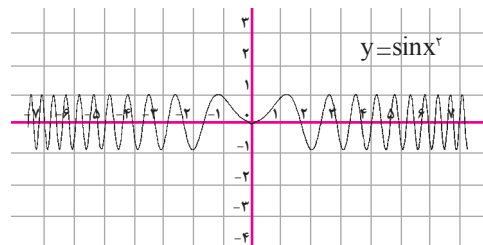
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ اما انتگرال } \int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ واگراست.}$$

۱۰. اگر تابع $y=f(x)$ پیوسته باشد و $\int_a^{\infty} f(x) dx$

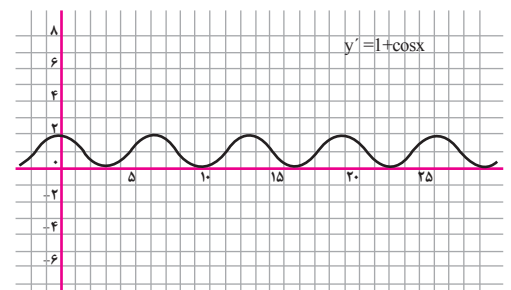
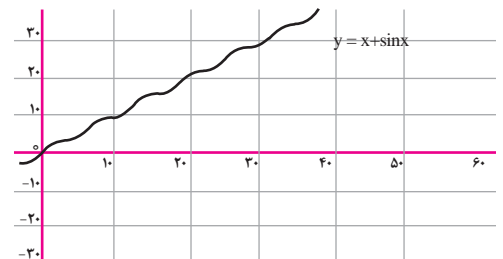
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ هم گرا باشد:}$$

مثال نقض: انتگرال $\int_a^{\infty} \sin x^2 dx$ واگراست، اما

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x^2 \text{ موجود نیست}$$

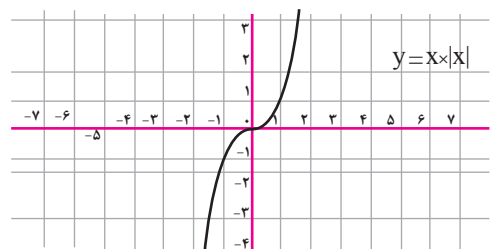


مثال نقض: تابع غیرخطی $f(x)=x+\sin x$ مشتق پذیر است و در فاصله $(0, \infty)$ یکنوا است، اما مشتق آن $f'(x)=1+\cos x$ در $(0, \infty)$ یکنوا نیست.



۸. اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد و نقطه $(a, f(a))$ نقطه عطف برای شکل تابع باشد، مشتق دوم تابع در آن نقطه برابر صفر است.

مثال نقض: تابع $y=x \times |x|$ در $x=0$ مشتق پذیر است و نقطه $(0, 0)$ نقطه عطفی برای آن است. اما مشتق دوم این تابع در نقطه $x=0$ وجود ندارد.



انتگرال

۹. اگر برای هر تابع $f(x)$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ، بنابراین انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ نیز همگراست.

* منابع

* پی نوشت ها

1. Polya
2. Klymchuk
3. Greunwald

1. Gruenwald, N., Klymchuk S, Using counter-examples in teaching Calculus. The New Zealand Mathematics Magazine (2003). 40(2), 33-41.
2. klymchuk. S. counter examples in calculus. Auckland university. New Zealand. (2007).
3. Klymchuk, S., Gruenwald, N. Counter-Examples in Calculus as a Pedagogical Strategy. Proceedings of the Third International Conference on Teaching Mathematics at the Undergraduate Level (ICTM-2). Wiley & Sons Inc. (2006).

واژه نامه

counter example	مثال نقض
curve	منحنی
covergence	همگرایی
continuouse	پیوسته
differentiable	مشتق پذیر
decreasing	نزولی
divergent	واگرا
derivative	مشتق